8. Klasse Grundwissen

1. Beziehungen zwischen Größen

a) Direkte Proportionalität:
Dem doppelten, dreifachen, … Wert der einen Größe x wird der doppelte, dreifache, … Wert der anderen Größe zugeordnet.

Es gilt die Quotientengleichheit: $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = m$ (Proportionalitätskonstante)

b) Indirekte (umgekehrte) Proportionalität:
Dem doppelten, dreifachen, … Wert der einen Größe x wird der halbe, dritte, … Teil der anderen Größe zugeordnet.
Es gilt die Produktgleichheit: $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = a$ (gemeinsamer Produktwert)

2. Lineare Funktionen

a) Allgemeine Definitionen:
Eine Zuordnung $f: x \mapsto y = f(x)$, die jedem Wert für x jeweils nur einen einzigen Funktionswert für y zuordnet, heißt Funktion f.
Die Menge aller Punkte P(x,y=f(x)) bezeichnet man als Graph G_f der Funktion f.
Die Menge aller Zahlen, für die ein Funktionswert berechnet werden kann, heißt Definitionsmenge D_f. Die Menge aller Funktionswerte heißt Wertemenge W_f.

Beispiel:

Funktionsvorschrift:	$f: x \mapsto 0{,}5 \cdot x - 2$
Funktionsterm:	$f(x) = 0{,}5 \cdot x - 2$
Funktionsgleichung:	$y = 0{,}5 \cdot x - 2$
Definitionsmenge:	$D_f = \mathbb{Q}$
Wertemenge:	$W_f = \mathbb{Q}$

b) Spezielle Definition:
Eine Funktion $f: x \mapsto m \cdot x + t$ mit $m, t \in \mathbb{Q}$ heißt lineare Funktion.
Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Die Zahl m gibt die Steigung, die Zahl t den y-Achsenabschnitt des Graphen an.

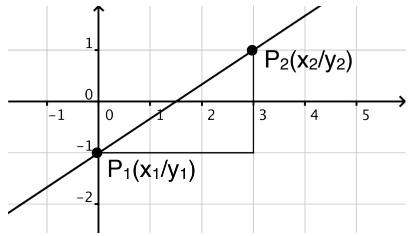
Beispiel:

Funktionsvorschrift: $f: x \mapsto \frac{2}{3} \cdot x - 1$

Funktionsgleichung bzw.

Geradengleichung: $y = \frac{2}{3} \cdot x - 1$

Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2}{3}$;



y-Achsenabschnitt: t = f(0) = -1
$\Rightarrow$ Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse: (0/f(0)) = (0/-1)
Für die Nullstelle x_0 der Funktion gilt: $f(x_0) = 0$
$\Rightarrow$ Schnittpunkt des Graphen G_f mit der x-Achse: $(x_0/f(x_0)) = (1{,}5/0)$

c) Eigenschaften der Gerade mit der Gleichung y = mx + t:
- Je größer m ist, desto steiler ist die Gerade.
- Für m < 0 fällt, für m > 0 steigt die Gerade.
- Für m = 0 verläuft sie parallel zur x-Achse.
- Alle Geraden mit gleicher Steigung m sind parallel.

d) Berechnung der Koordinaten des Schnittpunkts S zweier Geraden:

Beispiel: $f: x \mapsto 2 \cdot x - 4$ und $g: x \mapsto -x + 5$

1. Gleichsetzen der Funktionsterme: $2x - 4 = -x + 5$
2. Auflösen nach x: $x = 3$
3. Einsetzen der Lösung in eine der beiden Funktionen, z. B. f: $f(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$

$\Rightarrow$ S(3/2)

3. Lineare Gleichungssysteme

Zwei lineare Gleichungen (I und II) mit zwei gemeinsamen Variablen (x und y) bilden ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen. Ein Zahlenpaar (a / b) ist in der Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems, falls das Paar jede Gleichung des Systems erfüllt.

Beispiel: I: $3x - 4y = 4$
II: $x + 2y = 8$

Lösungsverfahren:

a) **Graphische Lösung:** Zeichne die beiden Geraden (I, II) in ein Koordinatensystem ein.
Die Geraden schneiden sich $\Rightarrow$ Es gibt genau eine Lösung (Schnittpunkt).
Die Geraden sind echt parallel $\Rightarrow$ Es gibt keine Lösung.
Die Geraden sind identisch $\Rightarrow$ Es gibt unendlich viele Lösungen.

b) **Additionsverfahren:**
I: $3x - 4y = 4$
-3·II: $-3x - 6y = -24$
I+(-3·II): $-10y = -20$
$y = 2$ in (II) $\Rightarrow x = 4 \Rightarrow L = \{(4/2)\}$

c) **Einsetzungsverfahren:**
I: $3x - 4y = 4$
II: $x + 2y = 8 \Rightarrow x = 8 - 2y$ in (I):
I´: $3(8 - 2y) - 4y = 4$
I´: $24 - 6y - 4y = 4$
I´: $y = 2$ in II $\Rightarrow x = 4 \Rightarrow L = \{(4/2)\}$

4. Bruchgleichungen

Lösungsbeispiel: $$\frac{3}{x+2} = \frac{4}{x+3}$$

Gleichung mit beiden Nennern multiplizieren: $3\cdot(x + 3) = 4\cdot(x + 2)$
Ausmultiplizieren: $3x + 9 = 4x + 8$
Nach der Variablen x auflösen: $x = 1 \Rightarrow L = \{1\}$

5. Potenzgesetze

Definitionen: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}}$ $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$ $\quad a^0 = 1$

Rechenregeln: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad a^x : a^y = a^{x-y}$

$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ $\quad a^x : b^x = (a : b)^x$ $\quad \left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$

6. Laplace-Wahrscheinlichkeit

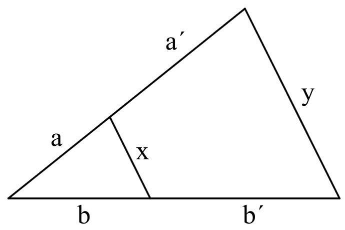
Grundbegriffe:
Jeden möglichen Ausgang eines Zufallsexperiments nennt man jeweils ein Ergebnis ω.
Alle Ergebnisse zusammen bilden die Ergebnismenge Ω.
Ein Ereignis E wird aus einem oder mehreren Ergebnissen gebildet (Teilmenge von Ω).
Das Gegenereignis zu einem Ereignis E enthält alle Ergebnisse, die nicht zu E gehören.

Laplace-Experimente:
Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heißen Laplace-Experimente. Die Wahrscheinlichkeit P(E) für ein Ereignis eines Laplace-Experimentes berechnet sich durch: $P(E) = \frac{\text{Anzahl der Elemente von E}}{\text{Anzahl der Elemente von } \Omega}$

Zählprinzip:
Zieht man aus k verschiedenen Mengen mit $m_1, m_2, \ldots m_k$ Elementen jeweils ein Element, so gibt es insgesamt $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ Möglichkeiten.
Ordnet man n Objekte nacheinander an, so gibt es dafür $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten.

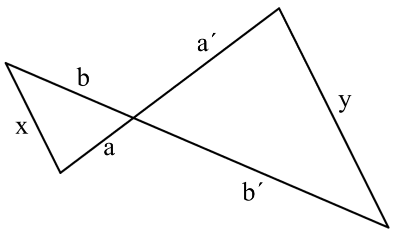
7. Strahlensatz

V-Figur (x || y)



$$\frac{a+a'}{a} = \frac{b+b'}{b} = \frac{y}{x}$$

X-Figur (x || y)



$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{y}{x}$$

8. Kreis

Kreisumfang $U = 2 \cdot r \cdot \pi$

Kreisfläche $A = r^2 \cdot \pi$